# Métodos Numéricos Demat Cimat 2013

# Guillermo Arriaga García

# Tarea 4: 1ª parte: Dos propiedades de una matriz simétrica positiva definida con coeficientes reales.

Sea A una matriz definida positiva, simétrica y con coeficientes reales y de tamaño nxn.

Siendo **A = AT** y X un vector columna no nulo de n entradas, la multiplicación

Sean los vectores **XK** para cada k=1,2,…,n definidos como aquellos que todas sus entradas son cero excepto la entrada k-ésima, cuyo valor es 1 y tienen n entradas. Al ser **XK** no nulo, la multiplicación 0 < XKTAXK = **aKK**. Sucediendo esto para cada k=1,2,…,n. Así que **los elementos de la diagonal de A son positivos**.

Sea **Xj,k** el vector de n entradas nulas, excepto en la entradas distintas j y k, en donde vale 1. Entonces:

Sea **Yj,k** el vector de n entradas nulas, excepto en las entradas distintas **yj**=1 y **yk**=-1. Entonces:

Con esto, tenemos que:

Ya que si a **ajk** >= 0 tomamos a YTAY y si **ajk** < 0 tomamos a XTAX.

Por lo que:

Sin pérdida de generalidad supongamos que **akk** **>** **ajj** , pues sería un procedimiento análogo para **akk** **<** **ajj**. Así que **|akk|>|ajk|** y **|akk|2>|ajk|2**. Si **akk** **=** **ajj** entonces **|akk||ajj|=|akk|2>|ajk|2**. Continuando con la suposición **akk>ajj** tenemos que hay dos casos:

* Si **ajk = 0** entonces se verifica que **(ajk)2<| akk || ajj |**.
* Si **ajk** no es cero, entonces: **| akk || ajk |>| ajk |2** = **(ajk)2** además de que:

Es decir, se verifica que **(ajk)2<| akk || ajj |**

Así que en todas las posibilidades, mostradas anteriormente, se verifica lo mismo. Y como fueron arbitrarios el 1<= j ,k <= n sólo pidiendo que j sea distinto de k. Entonces **se ha demostrado** que en una matriz A simétrica definida positiva, las entradas **(ajk)2<| akk || ajj | para j distinto de k**. Que es el segundo inciso de esta tarea.

El resultado anterior indica que el cuadrado de cualquier elemento que no esté en la diagonal es menor a la multiplicación de dos elementos de la diagonal de la matriz A simétrica y definida positiva. Sin pérdida de generalidad, continuando con el resultado anterior, **ajj** **akk** por lo que:

**(ajk)2<| akk || ajj | | akk |2** por lo que **|ajk|<|akk| para j distinto de k**

Lo que indica que el valor absoluto de cualquier elemento fuera de la diagonal es menor que un elemento de la diagonal (que es positivo, mayor que cero). Así que el (o los) elemento(s) más grande(s) de la matriz está(n) en la diagonal, con lo que se ha demostrado el primer inciso de esta tarea, y que se resume en la siguiente relación:

**MAX1 j , k n (|ajk |)= MAX1 k n (|akk|)**